Übungsklausur Geometrie 1 (Flughafen)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

      Gib gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S an.

   b) Gib eine Gleichung der Parallelen p zu h an, die durch den Punkt $Q(7\,|\,5\,|\,4)$ geht.

   c) Gib eine Gleichung der Ebene E an, die h und p enthält. (4VP)

2) Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,1\,|\,0)$, $B(2\,|\,0\,|\,2)$ und $C(-1\,|\,3\,|\,2)$.

   a) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene. Gib eine Gleichung dieser Ebene an.

   b) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

   c) Gegeben ist der Punkt $D(a-1\,|\,4\,|\,4)$. Bestimme die Werte a so,

      dass der Punkt D von C einen Abstand von 3 hat. (4VP)

3) Gegeben ist die Ebene $E: -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$ und $P(1\,|\,-2\,|\,2)$.

   a) Zeige rechnerisch, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

   b) Zeichne die Ebene E in ein Koordinatensystem ein.

   c) Gegeben ist außerdem die Ebene $F: x_3 = 5$. Beschreibe die Lage der Ebene F.

      Bestimme die Schnittgerade von E mit F. (4VP)

4) In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben.

   Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 4 und die Höhe beträgt 7.

   a) Gib mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

   b) Berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{BS}$. (3VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Flughafen)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Die Eckpunkte eines Flughafenterminals sind gegeben durch
$A(0|0|0)$, $B(200|0|0)$, $C(200|125|0)$, $D(0|125|0)$,
$E(0|0|75)$, $F(200|0|75)$, $G(200|125|37{,}5)$ und $H(0|125|37{,}5)$ (alle Angaben in Metern).
Die Punkte A, B, C und D begrenzen die Grundfläche,
die Punkte E, F, G und H begrenzen die Dachfläche.

a) (1) Stelle den Flughafenterminal in einem Koordinatensystem dar. (Maßstab 25m : 1LE)
(2) Berechne den Flächeninhalt der Seitenfläche BCGF.
(3) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt. (4VP)

b) Unter dem Terminal befindet sich ein Transportsystem für die Koffer.
Ein geradliniges Förderband g verläuft durch die Punkte $P(200|100|-5)$ und $Q(75|55|-2)$.
Ein zweites ebenfalls geradliniges Förderband h geht durch Punkt
$R(175|25|-10)$ und in Richtung von Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(1) Stelle die beiden Gleichungen der Förderbänder auf.
(2) Im Punkt $K(85|115|-1)$ befindet sich ein Koffer.
Prüfe, auf welchem Förderband der Koffer sich befindet.
(3) Zeige, dass sich die beiden Förderbänder nicht treffen.
(4) Berechne die Koordinaten des Punktes, in dem Förderband g den Boden erreicht. Liegt dieser Punkt in der Grundfläche des Terminals? (6VP)

c) Ein Flugzeug soll auf der Landebahn im Punkt $L(600|-100|0)$ aufsetzen.
Momentan befindet es sich in der Position $P(1300|-9100|2700)$
und fliegt in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$ (1 LE entspricht nach wie vor 1m).
(1) Wie weit ist das Flugzeug vom Landepunkt entfernt?
(2) In welchem Punkt setzt es auf dem Erdboden auf, wenn es seinen Kurs nicht ändert?
(3) Welche neue Richtung braucht das Flugzeug, um bei L aufzusetzen?
(4) Mit der neuen Richtung fliegt das Flugzeug direkt in eine Nebelwand,
die durch die Ebene N mit $N: 3x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 5150$ beschrieben wird.
Bestimme die Koordinaten des Punktes,
in dem das Flugzeug in die Nebelwand hinein fliegt. (5VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Flughafen)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix} \begin{matrix}\to k=-1\\ \to k=-4/3\\ \to k=1\end{matrix}$ $\Rightarrow$ RV sind linear unabhängig. (0,5P)

Schnittpunkt?

$$\left.\begin{matrix}\text{(I) } 3+2s=1-2t\\ \text{(II) } 6+4s=-3t\\ \text{(III) } 4+s=-1+t\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\text{(I) } 6+4s=2-4t\\ \text{(II) } 6+4s=-3t\\ \text{(III) } 4+s=-1+t\end{matrix}\right\} \text{(I)}-\text{(II)}: 0=2-t \Rightarrow \boxed{t=2} \text{ in (II): } \boxed{s=-3} \quad (1P)$$

$s=-3$ und $t=2$ in (III): (III): $4-3=-1+2 \Leftrightarrow 1=1 \vee \Rightarrow \boxed{S(-3\,|\,-6\,|\,1)}$ (0,5P)

b) $p:\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ (1P) c) $E:\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\5\end{pmatrix}$ (1P) **4P**

2) a) $E_{ABC}:\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ (1P)

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ (0,5P)

$|\overrightarrow{AB}|=3$; $|\overrightarrow{AC}|=3$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{18}$ (0,5P) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}| \Rightarrow$ ABC gleichschenklig (0,5P)

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}a-1+1\\4-3\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{a^2+1^2+2^2} = \sqrt{a^2+5}$

$\sqrt{a^2+5}=3 \Rightarrow a^2+5=9 \Leftrightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a_{1/2}=\pm 2}$ (1,5P) **4P**

3) a) P in E: $-2\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot 2=12 \Leftrightarrow -2-6+8=12 \Leftrightarrow 0=12$ Widerspruch (1P)

b) $S_1(-6\,|\,0\,|\,0), S_2(0\,|\,4\,|\,0), S_3(0\,|\,0\,|\,3)$ und Zeichnung (1P)

c) Parallel zur x_1x_2-Ebene (0,5P)

$E: -2x_1+3x_2+4x_3=12$ und $F: \boxed{x_3=5}$ Setze F in E ein: $-2x_1+3x_2+20=12$

Wähle $\boxed{x_2=t}$ $-2x_1+3t=-8 \Leftrightarrow \boxed{x_1=4+\frac{3}{2}t} \Rightarrow s: x = \begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$ (1,5P) **4P**

4) a) $A(2\,|\,2\,|\,0), B(-2\,|\,2\,|\,0), C(-2\,|\,-2\,|\,0), D(2\,|\,-2\,|\,0), S(0\,|\,0\,|\,7)$ (2P)

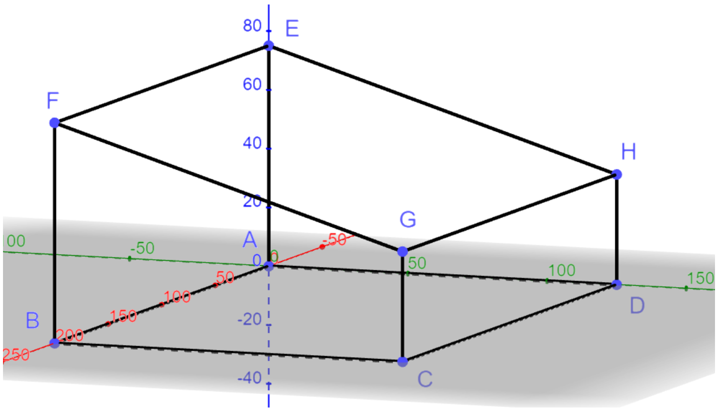
b) $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}0+2\\0-2\\7-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+7^2} = \boxed{\sqrt{57}}$ (1P) **3P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 1 (Flughafen)

Lösungen Wahlteil Seite 1:

a) (1)



(1,5P)

(2) $A_{BCGF} = 125 \cdot \frac{75+37{,}5}{2} = \boxed{7031{,}25\,m^2}$ (1P)

(3) $E_{EFH}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 125 \\ -37{,}5 \end{pmatrix}$ (0,5P)

„Schnürsenkelverfahren“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 125 \\ -37{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37{,}5 \\ 125 \end{pmatrix} \Rightarrow E: 37{,}5x_2 + 125x_3 = b$ (0,5P)

Punkt E in Ebene E: $125 \cdot 75 = \boxed{9375 = b} \Rightarrow E: 37{,}5x_2 + 125x_3 = 9375$ (0,5P) **4P**

b) (1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -125 \\ -45 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 175 \\ 25 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1P)

(2) $g: \begin{pmatrix} 85 \\ 115 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -125 \\ -45 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow s = 0{,}92 \\ \Rightarrow s = -1/3 \\ \Rightarrow s = 4/3 \end{matrix} \quad h: \begin{pmatrix} 85 \\ 115 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 25 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow t = 9 \\ \Rightarrow t = 9 \\ \Rightarrow t = 9 \end{matrix}$

Somit befindet sich der Koffer auf dem zweiten Band h. (1,5P)

(3) RV sind linear unabhängig, dh. zu zeigen ist g und h sind windschief.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{(I)} & 200 & - & 125s & = & 175 & - & 10t \\ \text{(II)} & 100 & - & 45s & = & 25 & + & 10t \\ \text{(III)} & -5 & + & 3s & = & -10 & + & 1t \end{array}$$

(I)+(II) $300 - 170s = 200 \Leftrightarrow \boxed{s = \frac{10}{17}}$ in (II): $100 - 45 \cdot \frac{10}{17} = 25 + 10t \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{825}{170}}$

s und t in (III): $-5 + \frac{30}{17} = -10 + \frac{825}{170} \Leftrightarrow -\frac{550}{170} = -\frac{875}{170}$

Widerspruch $\Rightarrow$ g,h windschief (1,5P)

(4) g in $E_{Boden}: x_3 = 0$: $-5 + 3s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{5}{3} \Rightarrow S(-8{,}33\,|\,25\,|\,0)$ (1P)

da die x_1- Koordinate von S nicht im Bereich von $0 \le x_1 \le 200$ liegt,
liegt S <u>nicht</u> in der Grundfläche des Terminals. (1P) **6P**

Übungsklausur Geometrie 1 (Flughafen)

Lösungen Wahlteil Seite 2:

c) (1) $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -700 \\ 9000 \\ -2700 \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{LP}\right| = \sqrt{700^2 + 9000^2 + 2700^2} = \boxed{9422{,}31\text{m}}$ (1P)

(2) $g_{Flugzeug}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1300 \\ -9100 \\ 2700 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$ in $E_{Boden}: x_3 = 0$:

$2700 - 25t = 0 \Leftrightarrow t = 108 \Rightarrow \boxed{S(220\,|\,-10180\,|\,0)}$ (1,5P)

(3) $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -700 \\ 9000 \\ -2700 \end{pmatrix}$ (0,5P)

(4) $g_{Flugzeug\ neu}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1300 \\ -9100 \\ 2700 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -700 \\ 9000 \\ -2700 \end{pmatrix}$ (0,5P) in N einsetzen:

$3(1300 - 700t) - \frac{1}{2}(-9100 + 9000t) = 5150 \Leftrightarrow 3900 - 2100t + 4550 - 4500t = 5150$

$\Leftrightarrow 8450 - 6600t = 5150 \Leftrightarrow 6600t = 3300 \Leftrightarrow \boxed{t = 0{,}5}$

$\Rightarrow$ T(950 | –4600 | 1350) (1,5P) **5P**

Summe: 15 Punkte